

测量分维的“数盒子”算法研究

梁东方 李玉梁 江春波

(清华大学水利水电工程系, 北京 100084)

摘要 在分析传统“数盒子”算法测量分形体分维缺陷的基础上, 首先通过引入一个新的参数 η , 提出了一种新的“数盒子”算法; 然后通过具体算例, 证实了该算法较传统算法的优越性, 并且指出了它的局限性, 同时还对“数盒子”算法测量的不确定性进行了讨论, 进而提出了可行的提高测量精度的方法; 最后应用平面激光诱发荧光 (PLIF) 技术得到了圆柱尾流区域的浓度场图象, 并由此提取得到尾流紊动-非紊动界面, 接着应用改进的算法对这一界面的分维进行了测量. 测量结果与前人的结论相吻合, 并且发现, 在非恒定流动中, 分维数具有几乎不随时间而改变的特性.

关键词 分形 “数盒子”算法 平面激光诱发荧光 尾流

中图分类号: O357.54 TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2002)03-0246-05

Research on the Box Counting Algorithm in Fractal Dimension Measurement

LIANG Dong-fang, LI Yu-liang, JIANG Chun-bo

(Hydraulic Engineering Department, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract The weakness of the conventional box counting algorithm in measuring the dimensions of fractals is analyzed. A novel improved box counting method is proposed by introducing a new parameter η , which is the ratio of fractal object's length in a box over the edge length of the box. For fractals having infinite self-similar levels, η is also infinite which has no meaning in mathematics. But the fractals existed in the real world all have their scaling limits, so η is meaningful in practical measurement. Its advantage is proved by the examples in the paper, and its limits are also pointed out. The uncertainty in measuring the fractal dimension using box counting method is discussed, and the corresponding means to overcome them are also proposed. Planar laser-induced fluorescence technique was employed to measure the concentration field in the near wake region of circular cylinder. Turbulence non-turbulence interfaces were extracted from these images, and the new box counting algorithm is used to measure the fractal dimension of these interfaces. The measured results agree with those of other researchers, and it is found that the fractal dimensions vary little with time in an unsteady flow field.

Keywords Fractal, Box counting algorithm, Planar laser-induced fluorescence, Wake

0 引言

经典的欧氏几何学将自然界的物体抽象为点、线、面的组合体, 其所研究的对象都具有一定的特征长度, 如线段的长度, 球的半径等, 而且微积分和近代数学的许多分支均以此理想化的抽象为基础; 然而, 自然界中存在的线和面并不都是光滑的, 如雪

花、云彩、树叶轮廓、海岸线、布朗运动的轨迹、生物组织结构及紊流图象等等中的一些面和线, 它们往往是曲折破碎的, 并具有十分精细的结构, 此外, 有类似特点的还有人们构造的 Koch 曲线, 康托 (Cantor) 集等. Mandelbrot 从 20 世纪 60 年代起注意到了自然界中这些复杂的曲线和曲面, 继而提出了一种新的几何学——分形几何学 (fractal geometry), 用来描述和研究这些形态极不规则或极

为破碎的几何对象^[1]。Marvsti & Strahle (1995)认为分形体与欧氏几何体最主要的区别有如下两点:①欧氏几何体可以通过特征方程来构造,如圆方程、球方程,而分形体则不具有特征长度,一般需要通过递归的方法来构造;②分形体的突出特点是具有自相似性,而欧氏几何体则没有这一特性。

目前,关于分维测量已有多种方法,如“脚规”(divider)法、“香肠”(sausage)法,但经常适用于二维图象测量的方法是数盒子法(box-counting)。陈朝泉虽曾提出过用余维方法(codimension)及小波分析方法(wavelet analysis)来进行测量^[2],但由于这两种方法的运算都比较复杂,在精度上也没有太大的优势,因此,数盒子法仍不失为一种既方便快速,又有一定准确度的方法,这也是数盒子法被广泛采用的原因。数盒子法的基本原理为:用尺度为 ϵ 的盒子去覆盖分形集,并统计盒子数 N ,然后将尺度 ϵ 和盒子 $N(\epsilon)$ 数点绘在对数坐标上或将 $\ln(\epsilon)$ 和 $\ln(N)$ 点绘在普通坐标上,最后对标度区间内的点,利用线性回归方法确定直线斜率,即可得到分维 D 。

1922年,Richardson提出充分发育的紊流是由尺度大小不同的旋涡组成,并提出了“级串(cascade)”的概念;Kolmogorov(1941)曾经显示大尺度下的流体运动会变成不稳定的,同时会将它的能量丢失给邻近较小尺度的运动,而不直接将其耗散成热,在大的雷诺数下,这种过程被假设一直重演下去,直至达到某一足够小的尺度 η 为止(η 称为Kolmogorov尺度),在此尺度以下,不可能再发生不稳定,能量将通过粘性作用

直接耗散成热;Kolmogorov认为在大尺度下的各向异性及非均匀性将随着尺度的递减而减弱,以至于在很小的尺度下,就成为统计上均匀及各向同性的,他还依据能量传递中的不同作用,对旋涡进行了分区,并定义了多种尺度。各种尺寸旋涡的产生过程恰似一个自相似分形集的构造过程(特别是在紊流的惯性子区),其能量耗散在构造过程的第 K 步发生,这里的 K 是相当大的。正是这种理论成为分形在紊流中获得应用的理论依据。因为只有较小的涡才具有分形特性,而大尺度的涡要由流动的边界决定,所以不同边界的流动应具有相同的分维;分维应与雷诺数无关,但是分维的标度(scaling)将随着雷诺数的增加和流动细节的丰富而增大。

1 改进的“数盒子”算法

对于分形体图象,如何统计盒子数目是“数盒子”算法的关键所在,现以英国主要岛屿的海岸线(图1(a))分形为例,来分析“数盒子”算法存在的问题:如果将覆盖有海岸线的所有正方形格子均计入在内,而不论海岸线在此正方形格子内所占的份额多么小(如图1(b)所示),那么其中涂黑的格子都应统计进来,这样似乎计算的 $N(\epsilon)$ 太大了,尤其是当尺度 ϵ 较大的时候,在曲线折叠较剧烈的地方,会出现了一片黑色格子。而粗视化方法的重要思想在于,尺码 ϵ 越大,反映的细节应越少。传统的“数盒子”法多为此种算法,因而可能导致测得的分维值偏小。



图 1 用“盒子”近似英国海岸线示意图

为了解决上述问题,本文引入一个参数 η 用来衡量某个正方形格子内海岸线的长度与正方形格子边长的相对大小

$$\eta = l/a \quad (2)$$

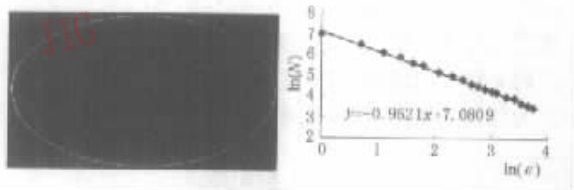
其中, l 为正方形格子内海岸线(分形体)的长度, a 为正方形格子边长. 如果只取 η 大于某个值的格子进行统计,而略去那些只拥有很少海岸线的格子,那么盒子数目将有所减少. 图 1(c)为取 $\eta=0.5$ 的结果. 由图 1(c)可见,一些迂回曲折的海岸线被忽略了,因为现在的尺码 ϵ 还无法反映海岸线的这些细节. 由于这种“数盒子”算法更能体现分形体的本质,因而能够更精确地测量其分维数.

2 算例分析

2.1 算例

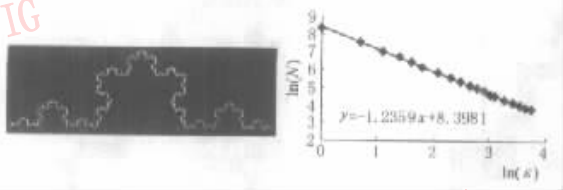
现以椭圆形和 Koch 曲线作为两个分形维数测量的例子,以检验改进后“数盒子”算法的效果.

当取 $\eta=0.0$ 时,本文的方法就退化为传统的数盒子算法. 采用它来测量椭圆和 Koch 曲线的分维结果如图 2、图 3 所示. 对椭圆及 Koch 曲线求得的分维值分别为 0.952 及 1.236,而理论上它们的值应分别为 1.0 和 1.262,由此可见,应用传统方法测得的分维值偏小.



(a) 椭圆形 (b) 测得的分维

图 2 椭圆形分维测量结果($\eta=0.0$)

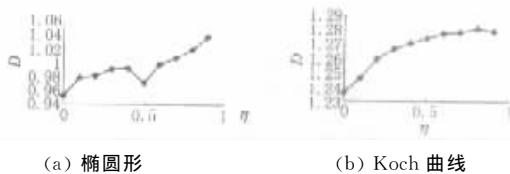


(a) Koch 曲线 (b) 测得的分维

图 3 Koch 曲线分维测量结果($\eta=0.0$)

图 4 是将 η 作为变量,分维的测量值随参数 η 的变化曲线,由图 4 可见,它们基本上是同向的变化关系,当 η 为 0.4 时,椭圆的分维最接近 1.0; η 为 0.2 时, Koch 曲线的分维最接近 1.262. 为了得到最

好的测量效果,系数 η 应按具体的图象来确定,但作为一般的测量,本文的算例显示,0.2~0.4 左右是一个较好的估计. 为了保守起见,使测量结果不致比传统“数盒子”算法测得的分维值增加过多,可以将 η 初步取为 0.2. 另外,考虑到本文将要测量的紊流的分维与 Koch 曲线的分维比较接近,故在对其进行测量时,将 η 取为 0.4.

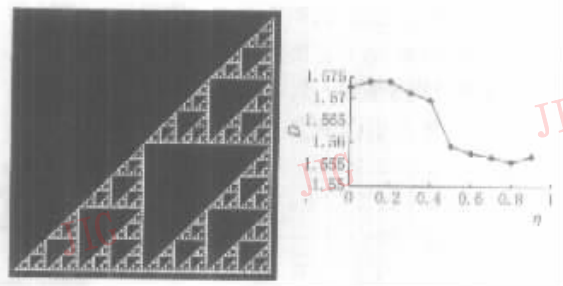


(a) 椭圆形 (b) Koch 曲线

图 4 分维的测量值与 η 的关系

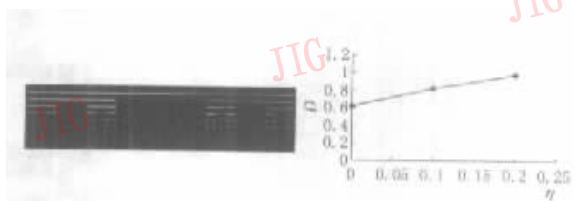
2.2 局限性

应当指出,本文的测量方法是有局限性的. 如前所述,用它测量连续曲线的分维会收到较好的效果,但一般不能用来测量离散点集的分维,图 5、图 6 即为本文方法测量失败的例子. 在这两个例子中,分维的测量值不但不随 η 的增加而增大,反而有所下降,特别是在测量 Cantor“尘”时,当 η 大于 0.2 以后,满足条件的盒子数全为零,根本不能使测量步骤进行下去,因此对于这些图形,采用传统的“数盒子”算法是比较合适的.



(a) 三角形分形体图形 (b) 分维与 η 的关系曲线

图 5 三角形分形体分维测量



(a) Cantor“尘”图形 (b) 分维与 η 的关系曲线

图 6 Cantor“尘”分维测量

图 6(b)从上向下显示的是 Cantor“尘”的生成过程,每一步去掉实线的中间三分之一. 实际分维测量只是针对最下面一条断断续续的线进行的.

另外,实际的分维测量还存在不确定性问题. 从分维的定义中已经看出,理论上的分维值都是在求极限的过程中获得的,而实际存在的分形体都只有有限层次的自相似结构. 大家知道,分维测量时,将 $\ln(\epsilon)$ 和 $\ln(N)$ 点绘在普通坐标图上,如果分维存在,则二者在某一区间内是线性关系,这个区间称为标度区间,但要严格确定标度区间比较复杂,因为客观物体是否具有分形特征的判断,往往带有主观色彩. 根据笔者经验,由于标度区间的确定,对分维的测量值有很大的影响,因此在实际测量中,可以根据测量点与拟合曲线的平均方差最小的原则来自动确定,但这样会导致较大的计算量. 另外,图象空间量子化的起始点也对分维测量结果有影响^[3](如图 7 所示),图 7(a)中应统计的网格数为 3,图 7(b)中却为 4,这种影响可以通过改变网格尺寸(即向 ϵ 小的方向移动标度区间)来减小.



图 7 起始点位置的影响

3 对绕流物体尾流区分维的测量

绕流物体尾流区浓度测量实验系统示意图如图 8 所示^[4]. 该系统采用荧光素钠作为示踪剂,在一小水箱中混合均匀后,放在比实验水槽底部高约 3m 的地方,下接一根竖直置于岛屿模型上游水中、周围布满直径为 1mm 小孔,直径为 8mm 的铜管;光源为 INNOVA70 系列的 Ar⁺激光器,采用单线模式下的蓝光,波长为 488nm,功率 1.6W,测量时,用普通摄像机,每 40ms 获得一幅图象,再用图象采集卡将图象信号数字化、存入计算机中进行分析.

许多实验结果都证实了紊流在多方面具有分形特性:如 Lovejoy(1982)测量了气象卫星云图和雷达照片中云和雨区的分维(1.35 ± 0.05),云和雨区受大气紊流的驱使,它们的图象反映了大气紊流的作用;Rys & Waldvogel(1986)对雷达获得的冰雹云图象进行了分维测量(1.36 ± 0.1);Sreenivasan 等人(1986, 1991)利用 PLIF 技术获得了边界层、射流和尾流的紊流图象,并进行了分维测量和分析,认为紊流分维在流

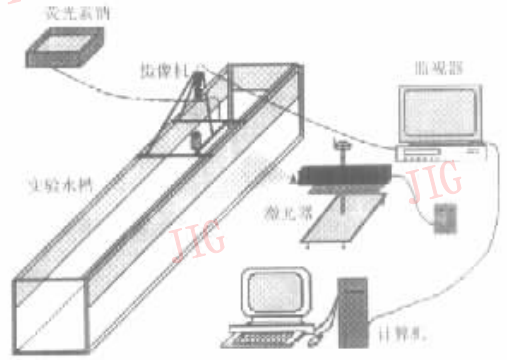
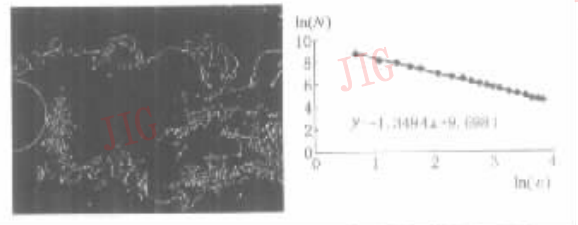


图 8 实验系统示意图

动的大尺度与 Kolmogorov 尺度之间为 1.36 ± 0.05 ^[5,6]. 本文利用 PLIF 技术获得了圆柱岛屿尾流区的紊动图象,并提取出了紊动与非紊动界面,其对这一界面的分维测量如图 9 所示. 为清晰起见,图中显示了绕流物体的边界,在实际测量时,应先将其剔除. 由图 10 可见,紊动尾流的分维随时间的改变很小.



(a) 圆柱岛屿尾流区的紊动-非紊动界面 (b) 紊动与非紊动界面分维

图 9 圆柱岛屿尾流区的分维(D)测量($n=0.4$)

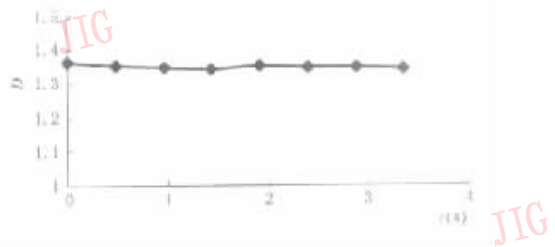


图 10 圆柱岛屿尾流区分维随时间的变化

4 结 论

对于连续的曲线,由于传统的“数盒子”算法测得的分维值偏小,测量精度较低,因此本文通过引入分形体在网格内的长度与网格边长之比 η 这一参数,改进了“数盒子”算法,从而提高了测量精度. 在实际测量中, η 可以粗略地取为 0.2~0.4 的某一值. 本文的

算例也证实了新算法的优越性,但是新算法不适于测量由离散点集构成的分形体的分维.文中还探讨了分维测量的不确定性因素,并给出了具体的提高精确度的措施.应用本文的“数盒子”算法测量圆柱岛屿尾流区紊动-非紊动界面的分维,测得的值约为1.35,并且随尾流区周期性运动的变化很小.

参 考 文 献

- 1 Turcotte D L. Fractals in fluid mechanics[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1988, 20: 5~16.
- 2 陈朝泉. 数字图象和 PLIF 技术研究潮流底部多孔射流浓度场及其分形[D]. 北京: 清华大学水利系, 1997.
- 3 黄真理. 平面激光诱导荧光(PLIF)技术及其测量射流浓度场的研究[D]. 北京: 清华大学水利系, 1993.
- 4 李云生. 数字图象技术和尾流区污染物浓度分布特性研究[D]. 北京: 清华大学水利系, 1998.
- 5 Sreenivasan K R, Meneveau C. The fractal facets of turbulence [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1986, 173: 357~386.
- 6 Sreenivasan K R. Fractals and multifractals in fluid turbulence [J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1991, 23: 539~600.

梁东方 1975年生,1998年获清华大学水利水电工程系流体机械工程与控制专业工程学士学位,现为清华大学水利水电工程系博士研究生.研究方向为环境水力学,目前主要兴趣集中在图象技术在实验流体力学中的应用.

李玉梁 1937年生,1959年毕业于清华大学水利工程系,现任该系教授,博士生导师.主要从事环境水力学及数字图象处理在水力学实验的应用研究.发表论文80余篇.

江春波 1989年获中国水利水电科学研究院博士学位,1993年在日本中央大学理工学部作博士后研究,1993年~1998年任日本 UNIC 公司研究员,现为清华大学水利水电工程系副教授、水力学实验室主任.研究方向为环境水力学、水工水力学.